

НКТП СССР
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Труды Центрального аэрогидродинамического института

Выпуск 123

532
2-19

С. А. ЧАПЛЫГИН и А. Л. ЛАВРЕНТЬЕВ

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ И СОПРОТИВЛЕНИИ
ДЛИННОГО ПЛОСКОГО КРЫЛА
В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СРЫВА С ЕГО ВЕРХНЕЙ
ПОВЕРХНОСТИ

С. А. ЧАПЛЫГИН и Н. С. АРЖАНИКОВ

К ВОПРОСУ О ДЕФОРМАЦИИ ТРУБЫ,
ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕ-
СКИМИ ЦИЛИНДРАМИ И
СЖАТОЙ ПОСТОЯННЫМ ДАВЛЕНИЕМ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Гидромеханика **Дополнительный**

НКТП СССР
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Труды Центрального аэрогидродинамического института

Выпуск 123

532
219

С. А. ЧАПЛЫГИН и А. Л. ЛАВРЕНТЬЕВ

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ И СОПРОТИВЛЕНИИ ДЛИННОГО ПЛОСКОГО КРЫЛА В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СРЫВА С ЕГО ВЕРХНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. А. ЧАПЛЫГИН и Н. С. АРЖАНИКОВ

К ВОПРОСУ О ДЕФОРМАЦИИ ТРУБЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕ- СКИМИ ЦИЛИНДРАМИ И СЖАТОЙ ПОСТОЯННЫМ ДАВЛЕНИЕМ

ПРОВЕРЕНО
СВ 1962 г.

переучет-1938г

ДОМ ТЕХНИЧЕСКОГО УЧЕБ. ЗАВЕДЕНИЯ
№ 12448



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

ПЕРЕУЧЕТ 1938
ММ

ПЕРЕУЧЕТ 1938 г.

T 34-5-4

Исчерпан тираж

U. S. S. R.
PEOPLE'S COMMISSARIAT OF HEAVY INDUSTRY. THE MAIN BOARD
OF AIRCRAFT INDUSTRY

Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute

No. 123

ON THE LIFT AND DRAG OF A FLAT WING OF
INFINITE SPAN (ASSUMING DISCONTINUOUS
FLOW ON ITS UPPER SURFACE)

by

S. A. CHAPLIGUIN and A. L. LAVRENTIEV

ON THE DEFORMATION OF AN ECCENTRIC
TUBE SUBJECTED TO UNIFORM EXTERNAL
PRESSURE

by

S. A. CHAPLIGUIN and N. S. ARJANIKOV

MOSCOW

1933

LENINGRAD

Редакционную работу по этой книге провел Г. А. Вольперт. Издание оформила В. Ф. Заульская.
Корректуру держал С. Ф. Морошкин. Сверял и наблюдал за выпуском Л. М. Волювца.

ОИТИ № 35. Индекс Т-34-5-4. Тираж 2 000. Сдано в набор 13/III 1933 г. Подп. в печ. 25/IX 1933 г. Формат бумаги
72 × 110. Печ. лист. 1²/₈. Кол. бум. л. 1²/₁₀ л. Кол. печ. зн. в выпуске 119 132 6. Заказ № 357. Ленгорлит № 16204.
Выход в свет сентябрь 1933 г.

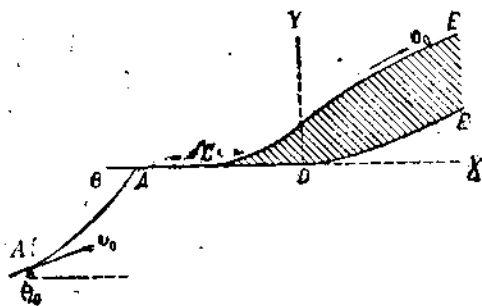
3-я тип. ОИТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко; 10.



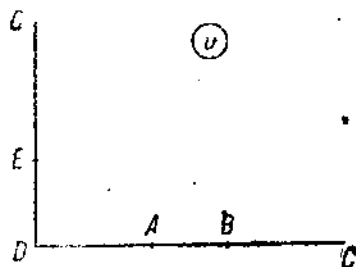
О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности

§ 1. Экспериментальная проверка формулы для поддерживающей силы, основанной на циркуляционной теории, показала, что эта теория дает довольно хорошее согласие с опытом, но при этом совершенно не получается лобового сопротивления. Теория разрывного течения с образованием спокойной области позади крыла, точно построенная для пластинки, не страдая указанным недостатком, дает для величины подъемной силы при малых углах атаки более чем вчетверо преуменьшенную величину силы. Естественно поэтому искать новые виды течения, которые не имели бы указанных недостатков.

§ 2. В настоящей статье изучается плоское невихревое стационарное течение безграничной несжимаемой идеальной жидкости, в которой находится неподвижная твердая прямоугольная пластинка, изображающаяся в плоскости течения прямолинейным отрезком BD (фиг. 1) данной длины l ; размах пластинки (размер, перпендикулярный к плоскости течения) бесконечно велик.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Скорость жидкости в бесконечности имеет заданную величину v_0 и составляет небольшой угол θ_0 (угол атаки) с направлением BD ; в некоторой точке A на нижней поверхности пластинки (критическая точка нулевой скорости) поток разветвляется: поток, идущий влево от A , обтекает пластинку, причем скорость в точке B будет бесконечна, и срывается с пластинки в заданной точке C ее верхней поверхности; $DC = c$; поток, идущий вправо от A , срывается с пластинки в точке D ; таким образом, получается уходящая в бесконечность область неподвижной жидкости с двумя свободными границами CE и DE . Задача заключается в вычислении течения, обладающего указанными свойствами, и в вычислении соответствующих этому течению подъемной силы и лобового сопротивления.

§ 3. Примем плоскость течения за плоскость xOy и область, занятую движущейся жидкостью, за область комплексной переменной $z = x + iy$; эту последнюю область отобразим на четверть плоскости вспомогательной комплексной переменной $u = \xi + i\eta$ (фиг. 2); точки, соответствующие друг другу на фиг. 1 и 2, обозначим одинаковыми буквами. Обозначим через w характеристическую функцию течения

$$w = \Phi + i\Psi,$$

где Φ — потенциал скоростей, а Ψ — функция тока. Тогда

$$v_0 \frac{dz}{dw} = \frac{v_0}{v} e^{i\vartheta},$$

где v — скорость течения в точке (x, y) , а ϑ — угол скорости с осью Ox .

Полагая на плоскости u : $DA = \alpha$, $DB = \beta$, $DE = 1$, мы удовлетворим условиям задачи с помощью соотношения:

$$v_0 \frac{dz}{dw} = \frac{(u - \beta)(u + \alpha)}{(u - \alpha)(u + \beta)}. \quad (1)$$

Так как в точке E

$$u = i, \quad \dot{v} = v_0, \quad \vartheta = \theta_0,$$

то

$$e^{i\theta_0} = \frac{(i - \beta)(i + \alpha)}{(i - \alpha)(i + \beta)} = \frac{1 + \alpha\beta + i(\beta - \alpha)}{1 + \alpha\beta - i(\beta - \alpha)} = e^{2i \arctg \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}},$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta};$$

полагая

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = k,$$

имеем

$$\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta} = k. \quad (2)$$

Найдем теперь зависимость между w и u . Положим $\Psi = 0$ на линии тока $A'A$ (фиг. 1); эта линия в точке A разветвляется: одна ветвь — $ABCE$, другая — ADE .

На каждой из них $\Psi = 0$; поэтому, отображая область течения на плоскость комплексной переменной w и считая $\Phi = 0$ в точке A , получим плоскость w с купурой AE , т. е. область, граница которой есть линия $A E$, считающаяся дважды ($EDABCE$); соответственные точки обеих областей опять обозначены одинаковыми буквами; E, E — бесконечно далекая точка плоскости w (фиг. 3).

Таким образом для получения связи между w и u надо конформно отобразить плоскость w с купурой AE на четверть плоскости u так, чтобы соответствовали друг

другу точки, обозначенные через A и E . Отображающая функция будет:

$$w = \frac{v_0 a}{4(1 + \alpha^2)} \left(\frac{u^2 - \alpha^2}{u^2 + 1} \right)^2, \quad (3)$$

где a — новая действительная положительная постоянная. Из (3) получаем:

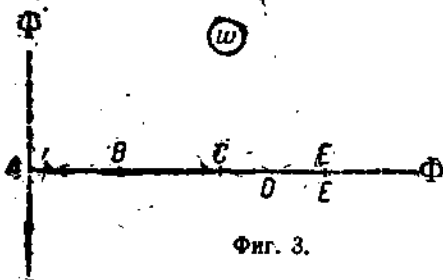
$$\frac{dw}{du} = v_0 a \frac{u(u^2 - \alpha^2)}{(u^2 + 1)^3}. \quad (4)$$

Равенства (1) и (4) дают:

$$\frac{dz}{du} = a \frac{u(u + \alpha)^2(u - \beta)}{(u + \beta)(u^2 + 1)^3}. \quad (5)$$

Отсюда получаем, принимая во внимание, что $z = 0$ при $u = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z}{a} = & \frac{Cu - B}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{(3C + 4E)u - 4D}{8(u^2 + 1)} + \left(\frac{3}{8}C + \frac{E}{2} + H \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + \\ & + \frac{F}{2} \log \frac{\beta^2(u^2 + 1)}{(u + \beta)^2} + \frac{B}{4} + \frac{D}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$



Фиг. 3.

где коэффициенты B, C, D, E, F, H имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{(1-k^2)(1+\beta^2)}{(1+k\beta)^2}, & C &= \frac{2k(1+\beta^2)}{(1+k\beta)^2}, \\ D &= \frac{1+2k\beta-k^2\beta^2}{(1+k\beta)^2}, & E &= -\frac{2k(1+k\beta+\beta^2)}{(1+k\beta)^2}, \\ F &= -\frac{2k^2\beta^2}{(1+\beta^2)(1+k\beta)^2}, & H &= \frac{2k^2\beta^2}{(1+k^2)(1+k\beta)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнения (3) и (6) дают характеристическую функцию w и, следовательно, вполне определяют изучаемое течение, если будут найдены входящие в эти уравнения постоянные a, α, β .

§ 4. Для определения постоянных a, α, β имеем уравнение (2) и условия: $z = -l$ при $u = \beta$, $z = -c$ при $u = \infty$; подставляя эти значения в (6), получим:

$$-\frac{l}{a} = \frac{C\beta - B}{4(1+\beta^2)^2} + \frac{(3C+4E)\beta - 4D}{8(1+\beta^2)} + \left(\frac{3}{8}C + \frac{E}{2} + H\right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta + \frac{F}{2} \log \frac{1+\beta^2}{4} + \frac{B}{4} + \frac{D}{2}, \quad (8)$$

$$-\frac{c}{a} = \left(\frac{3}{8}C + \frac{E}{2} + H\right) \frac{\pi}{2} + F \log \beta + \frac{B}{4} + \frac{D}{2}. \quad (9)$$

Кроме того, a, α, β суть действительные положительные числа, причем $a < \beta$, и по уравнению (2) $\beta > k$.

Положение точки A (фиг. 1) определится, если положить $DA = b$, из условия $z = -b$ при $u = \alpha$; подставляя эти значения в (6), имеем:

$$-\frac{b}{a} = \frac{C\alpha - B}{4(1+\alpha^2)^2} + \frac{(3C+4E)\alpha - 4D}{8(1+\alpha^2)} + \left(\frac{3}{8}C + \frac{E}{2} + H\right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha + \frac{F}{2} \log \frac{\beta^2(\alpha^2+1)}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{B}{4} + \frac{D}{2}. \quad (10)$$

§ 5. Применяя уравнение (1) к свободным границам DE и CE (фиг. 1), на которых $v = v_0$, $u = iu_1$, где u_1 — действительная переменная, изменяющаяся от 0 до 1 на DE и от 1 до ∞ на EC (фиг. 2), получим:

$$e^{\theta} = \frac{(iu_1 - \beta)(iu_1 + \alpha)}{(iu_1 + \beta)(iu_1 - \alpha)} = \frac{u_1^2 + \alpha\beta + i(\beta - \alpha)u_1}{u_1^2 + \alpha\beta - i(\beta - \alpha)u_1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2(\beta - \alpha)u_1(u_1^2 + \alpha\beta)}{(u_1^2 + \alpha\beta)^2 - (\beta - \alpha)^2 u_1^2}. \quad (11)$$

Легко убедиться, что $\operatorname{tg} \theta$ при изменении u_1 от 0 до ∞ имеет один максимум при

$$u_1^2 = \alpha\beta, \quad (\operatorname{tg} \theta)_{\max} = \frac{4\sqrt{\alpha\beta}(\beta - \alpha)}{4\alpha\beta - (\beta - \alpha)^2}, \quad (11')$$

по формуле (2): $\alpha\beta = \frac{\beta(\beta - k)}{1 + \beta k}$; поэтому $\alpha\beta \leq 1$ при $\beta \leq k + \sqrt{1 + k^2}$. Следовательно

максимум $\operatorname{tg} \theta$, т. е. точка перегиба, будет находиться на одной из свободных границ, а именно, на CE при $\beta > k + \sqrt{1 + k^2}$, на DE — при $\beta < k + \sqrt{1 + k^2}$; при $\beta = k + \sqrt{1 + k^2}$ точки перегиба нет.

Из (11) видим, далее, что $\theta = \frac{\pi}{2}$ для значений u_1 , определяемых уравнением:

$$u_1^2 + \alpha\beta = (\beta - \alpha)u_1,$$

т. е. при

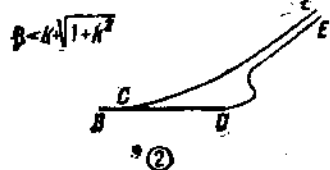
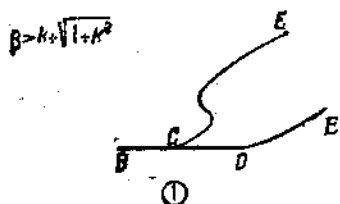
$$u_1 = \frac{\beta - \alpha \pm \sqrt{(\beta - \alpha)^2 - 4\alpha\beta}}{2};$$

если $(\beta - \alpha)^2 \geq 4\alpha\beta$, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ при одном или двух вещественных значениях u_1 ;

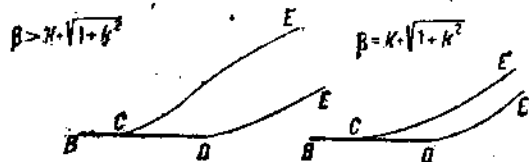
соответствующие точки должны лежать на свободной границе, имеющей точку перегиба. Таким образом при $(\beta - \alpha)^2 \geq 4\alpha\beta$ свободные границы имеют вид, указанный на фиг. 4 (чертежи 1 и 2); так как устойчивое стационарное течение с такой формой свободных границ, очевидно, физически невозможно, то на α и β должно быть наложено дополнительное ограничение:

$$(\beta - \alpha)^2 < 4\alpha\beta. \quad (12)$$

При соблюдении этого условия $(\text{tg } \theta)_{\text{max}} > 0$ по формуле (11'); следовательно, на свободных границах $\theta < \frac{\pi}{2}$, и эти границы будут иметь вид, указанный на фиг. 5.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Переписав (12) в виде: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 6\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + 1 < 0$, и имея в виду, что $\beta > \alpha$, получим:

$$1 < \frac{\beta}{\alpha} < 3 + 2\sqrt{2}; \quad (13)$$

полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ и пользуясь (2), имеем:

$$\beta = \frac{\gamma - 1 \pm \sqrt{(\gamma - 1)^2 - 4k^2\gamma}}{2k}.$$

Следовательно, для действительности β необходимо соблюдение условия:

$$(\gamma - 1)^2 - 4k^2\gamma \geq 0, \text{ или } \gamma \geq (k + \sqrt{1 + k^2})^2;$$

поэтому неравенство (13) заменяется таким:

$$(k + \sqrt{1 + k^2})^2 \leq \frac{\beta}{\alpha} < 3 + 2\sqrt{2}.$$

Отсюда с помощью (2) получаем:

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{1 - k^2})}{k} < \beta < \frac{(\sqrt{2} + 1)(1 + \sqrt{1 - k^2})}{k}. \quad (14)$$

§ 6. Вследствие сложной формы уравнений (8) и (9) не представляется возможным выразить явно α , β , a в зависимости от l , c , k ; для получения числовых результатов при данном числовом значении k надо брать числовые значения β , удовлетворяющие неравенству (14), и определять затем α из уравнения (2) и a из уравнения (8). Но так как в действительном течении a и c должны быть положительны и $c < l$, то следует выяснить, при каких значениях β выполняются эти условия. Для этого, а также с целью упростить числовые подсчеты, введем в уравнения (7), (8), (9), (10) вспомогательный угол φ , полагая $\beta = \text{tg } \varphi$; тогда по (2) $\alpha = \text{tg}(\varphi - \theta)$, где $\theta = \frac{\theta_0}{2}$, и так как $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то рассмотрению подлежат прежде всего зна-

чения φ от θ до $\frac{\pi}{2}$; установив, какая часть этого интервала соответствует действительным течениям, мы должны затем принять во внимание неравенство (14). После введения угла φ указанные уравнения преобразуются в следующие:

$$4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{l}{a} = \sin \theta \cos \varphi \sin(\varphi + \theta) + [\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)]^2 - f \log(2 \cos \varphi) - g + h\varphi, \quad (8')$$

$$4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{c}{a} = f \log \operatorname{tg} \varphi - g + \frac{h\pi}{2}, \quad (9')$$

$$4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{b}{a} = \cos^2(\varphi - \theta) \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta \operatorname{tg}(\varphi - \theta) [1 + 2 \operatorname{tg} \theta \sin 2\varphi] + \right. \\ \left. + 2 \cos^2(\varphi - \theta) - (2 \sin \varphi \sin \theta)^2 - \cos(\varphi - 3\theta) \cos(\varphi - \theta) \right\} + \\ + f \log \frac{\sin \varphi}{\sin(2\varphi - \theta)} - g + h(\varphi - \theta); \quad (10')$$

$$\left. \begin{aligned} f &= 2 \sin^2 \theta \sin^2 2\varphi, & g &= \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \sin 2\theta, \\ h &= \frac{\sin 2\theta}{2} (1 + \operatorname{tg} \theta \sin 4\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Из (9') и (7') получаем, что $\frac{c}{a} < 0$ при $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$, т. е. при $\beta \leq 1$, и при углах атаки $\leq 56^\circ$. В самом деле:

$$f \log \operatorname{tg} \varphi \leq 0, \quad (a)$$

$$\left(\frac{h\pi}{2} - g \right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \sin 2\theta < 0. \quad (b)$$

Далее, полагая

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{h\pi}{2} - g \right) = 2\bar{\varphi},$$

имеем:

$$2\bar{\varphi} = 2 (\pi \sin^2 \theta \cos 4\varphi + \sin 2\varphi - \cos 2\varphi \sin 2\theta),$$

$$2\bar{\varphi} = 2 [\pi \sin^2 \theta (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + \sin 2\varphi - \cos 2\varphi \sin 2\theta];$$

при $\theta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}$

$$\cos 4\varphi \geq 0, \quad \sin 2\varphi > \cos 2\varphi \sin 2\theta,$$

так как

$$\operatorname{tg} 2\varphi \geq \operatorname{tg} 2\theta > \sin 2\theta; \quad \text{поэтому } \bar{\varphi} > 0; \quad (c)$$

при $\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

$$\max(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) = \sqrt{2};$$

поэтому

$$\bar{\varphi} > \sin 2\varphi - \cos 2\varphi \sin 2\theta - \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sin^2 \theta (\sin 2\varphi - \cos 2\varphi);$$

следовательно,

$$\bar{\varphi} > 0, \quad \text{если } \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sin^2 \theta < 1, \quad \text{т. е. если } 2\theta \leq 56^\circ; \quad (d)$$

составление соотношений (9'), (a), (b), (c) и (d) показывает, что $\frac{c}{a} < 0$ при указанных условиях и что, следовательно, значениям $\beta \leq 1$ не соответствуют действительные течения. В уравнении (8') $h\varphi > 0$ при всех значениях φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, если $2\theta < \frac{\pi}{2}$; обозначив совокупность остальных членов правой части (8') через $\omega(\varphi)$, т. е. полагая

$$\omega(\varphi) = \sin \theta \cos \varphi \sin(\varphi + \theta) + [\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)]^2 - f \log(2 \cos \varphi) - g,$$

имеем $\omega(\varphi) > 0$ при $\frac{\pi}{3} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и при $2\theta \leq 35^\circ$, так как $\log(2 \cos \varphi) < 0$, $f > 0$,
 $g = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \sin 2\theta < 0$, если $\sin 2\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, что дает $2\theta \leq 35^\circ 15'$.

Для определения знака $\omega(\varphi)$ при $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ составим:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 2\varphi (1 - \sin 2\varphi \sin 2\theta) - \frac{1}{2} \sin 4\varphi \cos 2\theta - \cos 2\varphi \sin 2\theta +$$

$$+ 4 \sin^2 \theta \sin 2\varphi [\sin^2 \varphi - 2 \cos 2\varphi \log(2 \cos \varphi)];$$

все члены этого выражения положительны, и следовательно,

$$\frac{d\omega}{d\varphi} > 0, \text{ при } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \text{ и при } 2\theta < \frac{\pi}{2}.$$

Далее: $\omega\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} - \log 2\right) \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta > 0$, если $\text{tg } \theta \leq \frac{1}{4}$
 т. е. $2\theta \leq 28^\circ$.

Отсюда и из того, что $\frac{d\omega}{d\varphi} > 0$, получаем $\omega(\varphi) > 0$ при $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, если
 $2\theta \leq 28^\circ$. Таким образом $4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{f}{a} > 0$ и, следовательно, $a > 0$ для
 всех значений β от 1 до ∞ , если угол атаки равен или меньше 28° .

Покажем теперь, что при тех же условиях c обращается в нуль при одном и только одном значении β и что при всех остальных значениях β имеем $0 < c < 1$; для этого составим по уравнениям (9') и (7') $\frac{d}{d\varphi} \left[4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{c}{a} \right]$:

$$\frac{d}{d\varphi} \left[4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{c}{a} \right] = 4 \sin^2 \theta \sin 2\varphi + 2 \sin 2\varphi -$$

$$- 2 \cos 2\varphi \sin 2\theta + 2\pi \sin^2 \theta \cos 4\varphi +$$

$$+ 4 \sin^2 \theta \sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi.$$

При $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ первые три члена этого выражения положительны; $\sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi$,
 представленный графически на фиг. 6, имеет при $\varphi = 76^\circ 85'$ минимум, равный
 $-1,16$.

В интервале $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{8}\pi$ наименьшее значение $\sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi$ (получающееся,
 как видно из фигуры, при $\varphi = \frac{3}{8}\pi$) равно $-0,8814$; наименьшие значения $\cos 4\varphi$
 и $\sin 2\varphi$ в том же интервале равны соответственно -1 и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому:

$2 \sin 2\varphi + 2\pi \sin^2 \theta \cos 4\varphi + 4 \sin^2 \theta \sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi > \sqrt{2} - \sin^2 \theta (2\pi + 3,53) > 0$,
 если $\sin^2 \theta < \frac{\sqrt{2}}{2\pi + 3,53}$, что дает $2\theta \leq 44^\circ$.

В интервале $\frac{3}{8}\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ имеем:

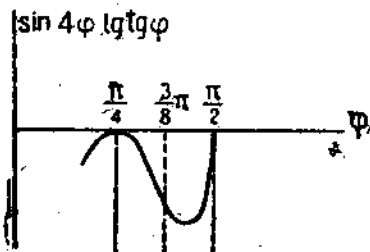
$$\cos 4\varphi \geq 0.$$

Наименьшие значения $\sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi$ и $-\cos 2\varphi$ равны соответственно $-1,16$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 Поэтому:

$$-2 \cos 2\varphi \sin 2\theta + 4 \sin^2 \theta \sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi = 4 \sin \theta [-\cos 2\varphi \cos \theta +$$

$$+ \sin \theta \sin 4\varphi \log \text{tg } \varphi] > 4 \sin \theta \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - 1,16 \sin \theta \right] > 0,$$

если $\text{tg } \theta < \frac{\sqrt{2}}{2,32}$, что дает $2\theta \leq 62^\circ$. Таким образом при углах атаки $\leq 44^\circ$



Фиг. 6.

$\frac{d}{d\varphi} \left[4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{c}{a} \right] > 0$ для всех значений β от 1 до ∞ , и так как $4 \cos^2(\varphi - \theta)$ при изменении φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ убывает, то $\frac{c}{a}$ возрастает; но выше показано, что $\frac{c}{a} < 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$; с другой стороны, $\frac{c}{a} = \frac{l}{a} > 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, как видно из уравнений (8'), (9') и (7'); поэтому, а также принимая во внимание, что $a > 0$ при $2\theta \leq 28^\circ$, получаем, что $c < l$ в интервале $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ при углах атаки $\leq 28^\circ$ и что c один раз обрывается в нуль в этом интервале.

В случае свободных границ без точки перегиба (фиг. 5) $\beta = k + \sqrt{1 + k^2}$; для этого значения β формулы (7') и уравнение (10') значительно упрощаются; в самом деле, заменяя k его значением $\operatorname{tg} \theta$, получим:

$$\beta = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right),$$

т. е.

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2};$$

подставляя это значение φ в (7') и частично в (10'), получим:

$$f = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \quad g = \sin \theta \cos 2\theta, \quad h = \frac{1}{4} \sin 4\theta, \quad (7'')$$

$$2(1 + \sin \theta) \frac{b}{a} = \sin^2 \varphi \left[\frac{\sin 2\theta}{2 \operatorname{tg} \varphi} (1 + 2 \sin \theta) + 2 \sin^2 \varphi \cos 2\theta - \cos(\varphi - 3\theta) \sin \varphi \right] + f \log \sin \varphi - g + h(\varphi - \theta). \quad (10'')$$

Подставляя $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ и (7'') в уравнение (9'), получим:

$$2(1 + \sin \theta) \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + \sin \theta \cos 2\theta \cdot \left(\frac{\pi \cos \theta}{2} - 1 \right) > 0,$$

если $\cos \theta > \frac{2}{\pi}$, что дает $\theta \leq 48^\circ$. Таким образом $c > 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, $c < 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поэтому, обозначая φ_0 значение φ , при котором $c = 0$, имеем:

$$\frac{\pi}{4} < \varphi_0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}. \quad (15)$$

Так как действительным течениям соответствуют только положительные значения c , то при углах атаки, равных или меньших 28° , неравенство (14) должно быть исправлено:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 \leq \beta < \frac{(\sqrt{2} + 1)(1 + \sqrt{1 - k^2})}{k}. \quad (16)$$

Переходим к составлению формул для поддерживающей силы и лобового сопротивления.

§ 7. Обозначая через X и Y компоненты равнодействующей давлений потока на пластинку, через ρ плотность жидкости, имеем:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint \frac{dw}{dz} dw,$$

причем, по известной теореме, интегрировать можно в области течения (в плоскости z) по бесконечно большой окружности, охватывающей всю область, занятую жидкостью — и движущейся и неподвижной — в плоскости z , следовательно, по бесконечно малому замкнутому контуру, окружающему точку E (фиг. 2):

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint w \frac{dw}{dz} + \frac{\rho}{2} \oint w d\left(\frac{dw}{dz}\right).$$

По (1) и (3):

$$\oint w \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = v_0 \frac{(z-\alpha)(z+\beta)}{(z+\alpha)(z-\beta)};$$

$$d\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{2v_0(\alpha-\beta)(z^2+\alpha\beta)}{(z+\alpha)^2(z-\beta)^2} du,$$

$$Y+iX = \frac{\rho v_0^2 a (\beta-\alpha)}{4(1+\alpha^2)} \oint \frac{(z-\alpha)^2(z^2+\alpha\beta)}{(z-\beta)^2(z^2+1)^2} du,$$

$$Y+iX = \frac{\rho v_0^2 a (\beta-\alpha)}{4(1+\alpha^2)} 2\pi i \left[\frac{d}{du} \frac{(z-\alpha)^2(z^2+\alpha\beta)}{(z-\beta)^2(z^2+1)^2} \right]_{u=i};$$

$$Y+iX = \frac{\pi \rho v_0^2 a (\beta-\alpha)}{8(1+\beta^2)^2} [4\beta(\alpha-\beta)(\beta^2-1) + (\alpha\beta+1)(\beta^2+1)^2 - 8\beta^2(\beta-\alpha)i];$$

или, полагая по уравнению (2): $\alpha\beta+1 = \frac{\beta-\alpha}{k}$:

$$Y+iX = \frac{\pi \rho v_0^2 a \beta^2 (\beta-\alpha)^2}{8(1+\beta^2)^2} \cdot \left[\frac{\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2}{k} - 4\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) - 8i \right];$$

$\beta-\alpha$ можно выразить через β и k , так как из уравнения (2) имеем:

$$\alpha = \frac{\beta-k}{1+k\beta},$$

и следовательно:

$$\beta-\alpha = \frac{k(1+\beta^2)}{1+k\beta}.$$

Обозначая через P поддерживающую силу и через Q лобовое сопротивление, получим:

$$P+iQ = e^{2\theta i} (Y+iX);$$

отсюда, после подстановки предыдущего выражения $Y+iX$:

$$P = \pi \rho v_0^2 a \frac{k^2 \cos 2\theta \cdot \beta^2}{8(1+\beta^2)(1+k\beta)^2} \left[\frac{\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2}{k} - 4\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) + 8 \operatorname{tg} 2\theta \right],$$

$$Q = \pi \rho v_0^2 a \frac{k^2 \cos 2\theta \cdot \beta^2}{8(1+\beta^2)(1+k\beta)^2} \left[\left\{ \frac{\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2}{k} - 4\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \right\} \operatorname{tg} 2\theta - 8 \right].$$

Положим здесь попеременно $\beta = \operatorname{tg} \varphi$ и введем еще две вспомогательные величины λ и ψ , приняв:

$$\lambda = 4 \cos^2(\varphi - \theta) \frac{l}{a} \text{ [см. уравнение (8')],}$$

$\operatorname{tg} \psi = \frac{f}{h}$, где f и h определены формулами (7').

Тогда выражения для P и Q примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} P &= \pi \rho v_0^2 l \cdot \frac{h}{2\lambda \cos \psi} \cdot \cos(2\theta - \psi), \\ Q &= \pi \rho v_0^2 l \cdot \frac{h}{2\lambda \cos \psi} \cdot \sin(2\theta - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Полагая $\frac{P}{Q} = n$, имеем из (17):

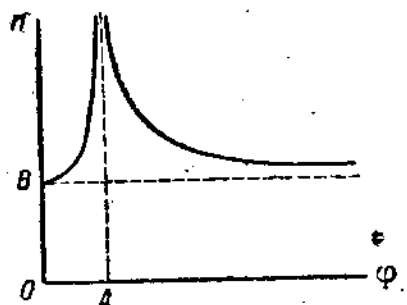
$$n = \operatorname{ctg}(2\theta - \psi),$$

и отсюда

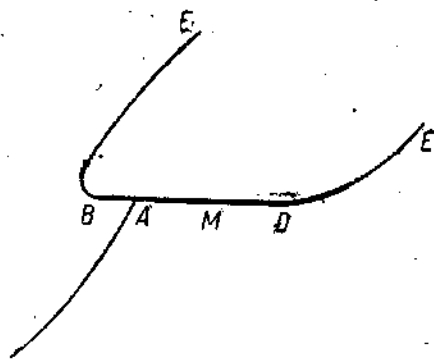
$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{8 \sin^3 \theta \sin 2\varphi \cos(2\varphi - \theta)}{\sin^2(2\theta - \psi) \cdot (f^2 + h^2)}.$$

Таким образом получаем связь между n и φ , изображенную на фиг. 7, где $OA = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, $OB = \text{ctg } 2\theta$.

§ 8. В прилагаемой таблице помещены результаты числовых подсчетов, произведенных по вышеприведенным формулам для углов атаки 5 , 10 и 15° . Для сравнения приведены также числа, получающиеся при тех же углах атаки, если предположить срыв струи в точке B (фиг. 8) и если предположить полное обтекание. Первый из этих случаев есть случай Релея, и так как в этом случае B совпадает с C , т. е. $\beta = \infty$, то соответствующие формулы получаются из уравнений (7')—(10')



Фиг. 7.



Фиг. 8.

и (17), если положить в них $\varphi = \frac{\pi}{2}$; уравнение (8') дает $\lambda = \frac{\pi \sin 2\theta}{4} + 1$, из (9') получаем $c = l$, как и должно быть; деля уравнение (10') на (8'), получим:

$$\frac{b}{l} = \frac{2 \cos 2\theta (1 + \sin^2 2\theta) + (\pi - 2\theta) \sin 2\theta + 2}{\pi \sin 2\theta + 4};$$

отсюда, обозначая через M середину BD , имеем:

$$AM = l \left(\frac{b}{l} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cos 2\theta (1 + \sin^2 2\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \sin 2\theta}{\pi \sin 2\theta + 4}; \quad (a)$$

из формул (17) получаем:

$$P = \frac{\pi \rho v_0^2 l \sin 2\theta \cos 2\theta}{\pi \sin 2\theta + 4}, \quad Q = \frac{\pi \rho v_0^2 l \sin^2 2\theta}{\pi \sin 2\theta + 4}. \quad (b)$$

Формулы (a) и (b) совпадают с формулами Релея¹. Заметим, что $\beta = \infty$ не удовлетворяет неравенству (16), но рассуждение, приводящее к этому неравенству, основано на рассмотрении формулы (11) и существенно предполагает, что $\beta \neq \infty$; при $\beta = \infty$ формула (11) переходит в следующую:

$$\text{tg } \vartheta = \frac{2u_1}{a^2 - u_1^2}.$$

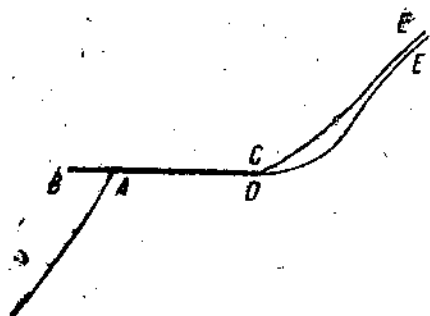
Из этой формулы видно, что свободные границы не имеют точки перегиба и что $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ только для одного значения u_1 , а именно, $u_1 = a$; соответствующая точка находится на свободной границе CE , так как при $\beta = \infty$ по (2) $\alpha = \frac{1}{k} > 1$; далее, формула показывает, что в точке B $\vartheta = \pi$, в точке D $\vartheta = 0$; таким

¹ Lamb, Hydrodynamics, 1924, p. 95.

образом, свободные границы имеют вид, показанный на фиг. 8. В случае полного обтекания получаем по циркуляционной теории следующие формулы:

$$b = l \cos^2 2\theta, \quad P = \pi r v_0^2 l \sin 2\theta, \quad Q = 0.$$

Вычисления, сделанные для разных значений β , удовлетворяющих неравенству (16), показали, что при больших значениях β определяемые величины весьма мало отличаются от получаемых в случае Релея; поэтому при составлении таблицы для каждого угла атаки были взяты небольшие значения β . Кроме того, для каждого угла атаки приведены числа, получающиеся при $\beta = k + \sqrt{1 + k^2}$ (см. фиг. 5) и при $\beta = \operatorname{tg} \varphi_0$, т. е. при $c = 0$ (см. фиг. 9), причем φ_0 определялось приближенно так, чтобы получалось $\frac{c}{l} < 0,001$.



Фиг. 9.

2θ	φ	β	$\frac{c}{l}$	$\frac{b}{l}$	$\frac{P}{\pi r v_0^2 l}$	$\frac{Q}{\pi r v_0^2 l}$	$\frac{P}{Q}$
5°	90° (случай Релея)	∞	1	0,9999	0,0203	0,0018	11,3
	85°	11,43	0,9999	0,9998	0,0206	0,0017	12,1
	75°	3,732	0,9938	0,9915	0,0234	0,0015	15,6
	55°	1,428	0,7395	0,9960	0,0479	0,0004	119,75
	46°15'	1,0446	0,0948	0,9928	0,0830	0	∞
	45°32'20"	1,0190	0,0003	0,9924	0,0874	0,000005	17486
	Полное обтекание		—	—	0,9924	0,0872	—
10°	90°	∞	1	0,9998	0,0376	0,0066	5,7
	85°	11,43	0,9998	0,9991	0,0382	0,0065	5,9
	75°	3,732	0,9928	0,9965	0,0435	0,0056	7,8
	55°	1,428	0,7122	0,9200	0,0947	0,0012	78,9
	47°30'	1,0913	0,1808	0,9725	0,1577	0	∞
	46°4'30"	1,0382	0,0002	0,9698	0,1759	0,000074	2385,8
	Полное обтекание		—	—	0,9698	0,1736	—
15°	90°	∞	1	0,9986	0,0519	0,0139	3,7
	84°17'22"	10	0,9996	0,9967	0,0528	0,0135	3,9
	63°26'6"	2	0,9172	0,9766	0,0899	0,0064	14,0
	56°18'36"	1,5	0,7487	0,9629	0,1324	0,0025	53,0
	48°45'	1,1403	0,2589	0,9394	0,2244	0	∞
	46°36'45"	1,0579	0,0001	0,9332	0,2665	0,0004	666
	Полное обтекание		—	—	0,9330	0,2588	—

Summary

The authors of this paper deal with two dimensional flow of an ideal incompressible fluid in which is placed a fixed flat wing. The flow is discontinuous, but the stream lines considered here differ from those in the theory of Kirchhoff-Rayleigh in that the fluid flows around the leading edge of the wing creating a critical point of infinite velocity. The discontinuity takes place at some point on the upper surface of the wing and on its trailing edge. The problem in its substance is indeterminate and the point of discontinuity must be assumed. The values of lift and drag will depend on the assumptions. These values based on various assumptions are given in the summary table.

К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением

Вопрос об отклонении формы трубы от круглой был сравнительно мало исследован как теоретически, так и экспериментально, несмотря на большой практический интерес этого вопроса, так как речь идет о неправильностях в форме трубы, могущих произойти при ее изготовлении. В своей работе, появившейся в 1930 г., Б. В. Булгаков исследует полностью вопрос о влиянии отклонения формы трубы от круглой на ее сопротивление внешнему давлению в том случае, когда труба ограничена двумя конфокальными эллиптическими цилиндрами.

В настоящей работе рассматривается еще один вид отклонения формы трубы, именно, тот случай, когда труба ограничена двумя эксцентрическими круглыми цилиндрами, иными словами, изучается вопрос о сдавливании трубы с неодинаковой толщиной стенок.

§ 1. Постановка задачи

Допустим, что нам дана труба, ограниченная двумя эксцентрическими цилиндрами радиусов r и r_1 . На внешнюю часть трубы производится давление p . Требуется изучить деформации, при этом возникающие. Как известно, силы деформации имеют вид (фиг. 1):

$$X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (1)$$

при этом функция w удовлетворяет так называемому бигармоническому уравнению:

$$\Delta \Delta w = 0, \quad (2)$$

где операция Δ есть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Введем теперь биполярные координаты Неймана, для чего положим:

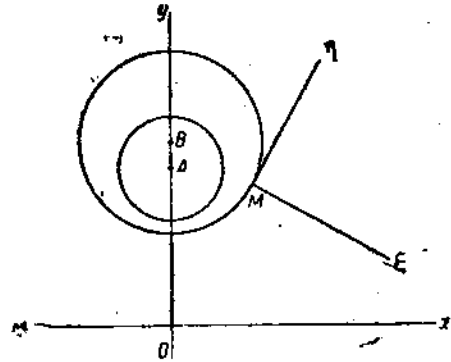
$$z = x + iy = c \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad (3)$$

где

$$u = \xi + i\eta.$$

В таком случае, разделяя действительную и мнимую части¹, найдем:

$$\text{На основании того, что } \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(i\eta) = i \operatorname{sh} \eta, \\ \cos(i\eta) = \operatorname{ch} \eta. \end{cases}$$



Фиг. 1.

$$x = c \frac{\sin \xi}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta}, \quad y = c \frac{\operatorname{sh} \eta}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} \quad (4)$$

и

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{c}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} \quad (5)$$

Из этих формул без труда находим:

$$x^2 + y^2 = c^2 \frac{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta + \cos \xi}, \quad (6)$$

или еще

$$x^2 + y^2 + c^2 = \frac{2c^2 \operatorname{ch} \eta}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} = 2cy \operatorname{ct} h \eta. \quad (7)$$

Допустим, далее, что наши окружности сечения таковы, что внутренняя окружность соответствует значению параметра $\eta = \alpha$, а внешняя $\eta = \beta$, причем

$$\alpha > \beta. \quad (8)$$

В таком случае нетрудно получить уравнения этих окружностей. В самом деле, для внутренней окружности радиуса r $\eta = \alpha$; следовательно, для нее уравнение (7) будет иметь следующий вид:

$$x^2 + y^2 + c^2 = 2cy \operatorname{ct} h \alpha,$$

и уравнение ее напишется в виде:

$$x^2 + (y - c \operatorname{ct} h \alpha)^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad (9)$$

причем для нее

$$r = \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha}, \quad OA = c \operatorname{ct} h \alpha. \quad (10)$$

Аналогично для внешней окружности радиуса r_1 будем иметь следующие выражения:

$$x^2 + (y - c \operatorname{ct} h \beta)^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \beta}, \quad (11)$$

$$r_1 = \frac{c}{\operatorname{sh} \beta}, \quad OB = c \operatorname{ct} h \beta. \quad (12)$$

Примечание. Мы употребляем для \sinh , \cosh и $\operatorname{ctg} h$ сокращенные обозначения sh , ch , cth .

§ 2. Граничные условия задачи

Обозначим слагающие силы давления на площадку поверхности по направлению $\xi = \operatorname{const}$, т. е. нормальному к внешней поверхности окружности, через X_n , Y_n . В таком случае:

$$X_n = X_x \frac{dy}{ds} - X_y \frac{dx}{ds}, \quad Y_n = X_y \frac{dy}{ds} - Y_x \frac{dx}{ds}, \quad (13)$$

где $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ обозначают косинусы угла касательной к поверхности по направлению $\eta = \operatorname{const}$. Принимая во внимание соотношения (1), можно выразить эти составляющие в следующем виде:

$$X_n = \frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad Y_n = -\frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

На внутренней границе трубы давления p не имеется, следовательно:

1) на внутренней границе:

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0;$$

2) на внешней границе:

$$X_n = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n = p \frac{dx}{ds}.$$

Предположим в дальнейшем, что внешнее давление p есть величина постоянная, т. е.

$$p = \text{const.} \quad (14)$$

В таком случае будем иметь две группы граничных условий:

1) на внутренней границе:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = d, \quad w = cy + dx + f;$$

2) на внешней границе:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -py + k, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -px + l, \quad w = -\frac{p}{2}(x^2 + y^2) + ky + lx + n.$$

Так как без изменения величины напряжений к w можно приложить любой линейный многочлен, то будем считать, что $c = d = f = 0$. Кроме того, в силу симметрии деформаций, коэффициент $l = 0$, и мы окончательно, пользуясь формулами (4), будем иметь следующие граничные условия:

1) на внутренней границе $\eta = \alpha$:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad (15)$$

2) на внешней границе $\eta = \beta$:

$$w = -\frac{pc^2 \text{ch } \beta}{\cos \xi + \text{ch } \beta} + k \frac{\text{sh } \beta}{\cos \xi + \text{ch } \beta} + n', \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{pc^2 \text{sh } \beta}{\cos \xi + \text{ch } \beta} + \frac{k \text{ch } \beta}{\cos \xi + \text{ch } \beta} - (c^2 p \text{ch } \beta + k \text{sh } \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\cos \xi + \text{ch } \beta}, \quad (17)$$

где k и n' совершенно произвольны.

§ 3. Решение уравнения $\Delta \Delta w = 0$

Теперь остается подобрать функцию w , удовлетворяющую этим условиям. Нетрудно простыми вычислениями проверить, что следующее выражение для w указанным требованиям удовлетворяет, именно:

$$\frac{w}{L} = \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \cdot \text{ch}(\eta - \beta) \}}{\cos \xi + \text{ch } \eta} + \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch}(\eta - \beta) - (\alpha - \eta) \text{ch}(\alpha - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta}, \quad (18)$$

где постоянная L подлежит определению. Эта функция w удовлетворяет уравнению (2), так как ее можно, что нетрудно проверить, представить в следующем виде:

$$\left(-\text{ch } \alpha \cdot \frac{y}{c} + \frac{x^2 + y^2 + c^2}{2c^2} \text{sh } \alpha \right) [\text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) + \cos \xi \text{ch}(\eta - \beta)] - (\alpha - \eta) \text{ch}(\alpha - \beta), \quad (a)$$

а это частный вид интеграла уравнения $\Delta \Delta w = 0$, ибо его интеграл можно представить в виде:

$$w = (x^2 + y^2) \varphi + x\varphi_1 + y\varphi_2 + \varphi_3,$$

где φ , φ_1 , φ_2 и φ_3 — гармонические функции.

В самом деле, выражение (18) можно переписать так:

$$\frac{w}{L} = \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta} + \frac{\cos \xi \text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch}(\eta - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta} - (\alpha - \eta) \text{ch}(\alpha - \beta),$$

или, пользуясь выражениями (4) и (7), еще иначе:

$$\begin{aligned} \frac{w}{L} = & \frac{1}{2c^2} (x^2 + y^2 + c^2) \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} (\alpha - \beta) - \operatorname{ch}^2 \alpha \cdot \frac{y}{c} \operatorname{ch} (\alpha - \beta) + \\ & + \frac{1}{2c^2} \cos \xi \operatorname{ch} (\eta - \beta) \operatorname{sh} \alpha \cdot (x^2 + y^2 + c^2) - \\ & - \cos \xi \operatorname{ch} (\eta - \beta) \operatorname{ch} \alpha \cdot \frac{y}{c} - (\alpha - \eta) \operatorname{ch} (\alpha - \beta); \end{aligned}$$

отсюда непосредственно получаем выражение (19). Из выражения (а) для $\frac{w}{L}$, принимая во внимание соотношение (7), заключаем, что при $\eta = \alpha$:

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0,$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta} = & - \frac{\operatorname{ch} (\alpha - \eta) \{ \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} (\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \eta \cdot \operatorname{ch} (\eta - \beta) \} + \operatorname{sh} (\alpha - \eta) \operatorname{sh} (2\eta - \beta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} - \\ & - \frac{\operatorname{sh} (\alpha - \eta) \{ \dots \} \operatorname{sh} \eta}{(\cos \xi + \operatorname{ch} \eta)^2} - \operatorname{ch} (2\eta - \alpha - \beta) + \operatorname{ch} (\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (19)$$

При $\eta = \beta$ нетрудно установить, что $\frac{w}{L}$ и $\frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta}$ примут следующий вид:

$$\frac{w}{L} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh}^2 (\alpha - \beta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \beta} + \operatorname{sh} (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \operatorname{ch} (\alpha - \beta), \quad (20)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta} = - \frac{\operatorname{sh} (\alpha - \beta) [\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} (\alpha - \beta) + \operatorname{sh} \beta]}{\cos \xi + \operatorname{ch} \beta} + \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh}^2 (\alpha - \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\cos \xi + \operatorname{ch} \beta}. \quad (21)$$

Таким образом для удовлетворения граничных условий (16) и (17) будем иметь три соотношения для определения постоянных k и n , а также основного коэффициента L , путем сравнения выражений (16), (20), (17), (21). Имеем:

$$L \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh}^2 (\alpha - \beta) = -c^2 p \operatorname{ch} \beta + k \operatorname{sh} \beta, \quad (22)$$

$$\operatorname{sh} (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \operatorname{ch} (\alpha - \beta) = n, \quad (23)$$

$$-L [\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} (\alpha - \beta) \operatorname{ch} (\alpha - \beta) + \operatorname{sh} \beta \cdot \operatorname{sh} (\alpha - \beta)] = -c^2 p \operatorname{sh} \beta + k \operatorname{ch} \beta. \quad (24)$$

Обратимся теперь к определению коэффициента L . Для этого из уравнений (22) и (24) исключим коэффициент k . Получим:

$$L (\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta) \operatorname{sh} (\alpha - \beta) = -pc^2. \quad (25)$$

Выразим теперь коэффициент L через основные параметры трубы, т. е. через величину d — расстояние между центрами, характеризующую эксцентриситет, а также через радиусы r и r_1 ограничивающих трубу цилиндров (фиг. 2). Из формул (10) и (12) находим:

$$d = AB = c \cdot \operatorname{cth} \beta - c \cdot \operatorname{cth} \alpha,$$

или, в силу соотношений $\operatorname{sh} \alpha = \frac{c}{r}$, $\operatorname{sh} \beta = \frac{c}{r_1}$,

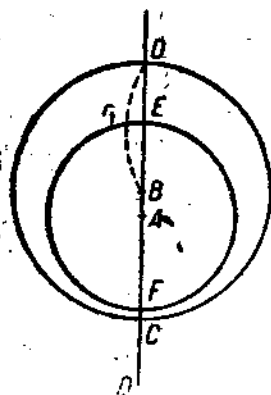
$$d = \frac{c \cdot \operatorname{sh} (\alpha - \beta)}{\operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta}, \quad \operatorname{sh} (\alpha - \beta) = \frac{c \cdot d}{r \cdot r_1}. \quad (26)$$

Далее, нетрудно установить, что

$$c^2 = \overline{OA}^2 - r^2, \quad c^2 = (\overline{OA} + d)^2 - r_1^2,$$

откуда находим:

$$r_1^2 - r^2 - d^2 = 2\overline{OA} \cdot d,$$



Фиг. 2.

или

$$\overline{OA} = \frac{r_1^2 - r^2 - d^2}{2d},$$

и аналогично:

$$\overline{OB} = \frac{r_1^2 - r^2 + d^2}{2d}.$$

Вставляя найденное значение \overline{OA} в выражение для c^2 , получим:

$$c^2 = \left(\frac{r_1^2 - r^2 - d^2}{2d} \right)^2 - r^2 = \frac{[r_1^2 - (r+d)^2][r_1^2 - (r-d)^2]}{4d^2},$$

или

$$c^2 = \frac{(r_1 + r + d)(r_1 + r - d)(r_1 - r - d)(r_1 - r + d)}{4d^2}. \quad (27)$$

Введем теперь следующие обозначения. Именно, обозначим наружный диаметр CD трубы через D , и пусть

$$CF = \delta, \quad ED = \varepsilon,$$

где δ и ε соответственно обозначают минимум и максимум толщины трубы (фиг. 2). В таком случае, как нетрудно установить непосредственно из чертежа, будем иметь следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r + d &= FD = D - \delta, \\ r_1 + r - d &= EC = D - \varepsilon, \\ r_1 - r - d &= CF = \delta, \\ r_1 - r + d &= ED = \varepsilon, \\ 2d &= \varepsilon - \delta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

После подстановки этих значений выражение для c^2 примет следующий вид:

$$c^2 = \frac{(D - \delta)(D - \varepsilon)\delta \cdot \varepsilon}{4d^2}. \quad (29)$$

Из формул (25) в силу (26) находим:

$$L = - \frac{pr_1^3 \cdot r^3}{d \cdot c \cdot (r_1^2 + r^2)}.$$

Подставляя значение c по формуле (29), окончательно для коэффициента L получим следующее выражение:

$$L = - \frac{2pr^3 r_1^3}{(r^2 + r_1^2) \sqrt{(D - \delta)(D - \varepsilon)\delta \cdot \varepsilon}}. \quad (30)$$

или, еще иначе:

$$L = - \frac{2pr^3 \cdot r_1^3}{(r^2 + r_1^2) \sqrt{[(r + r_1)^2 - d^2][(r - r_1)^2 - d^2]}}.$$

§ 4. Выражения для напряжений в криволинейных координатах

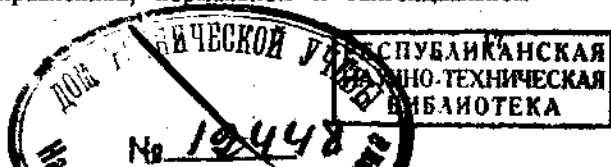
Обратимся теперь к определению напряжений в теле трубы. Ищем поперечному:

$$X_n = \frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad Y_n = - \frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial x},$$

где параметр H имеет следующее выражение:

$$H^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{c^2}{(\cos \xi + \operatorname{ch} \eta)^2}.$$

Обозначим слагающие напряжения в направлениях, нормальном и тангенциальном



к кругам $\eta = \text{const}$, через Ξ и Z , а в направлении, нормальном к кругам $\xi = \text{const}$, через Υ . В таком случае для Ξ будем иметь:

$$\Xi = -\frac{1}{H} \left(X_n \frac{\partial x}{\partial \eta} + Y_n \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \xi \partial x} \right),$$

или

$$H^2 \Xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial x},$$

откуда

$$H^2 \Xi = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2},$$

но

$$H^2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$H^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta}.$$

Следовательно, выражение для Ξ окончательно примет следующий вид:

$$H^2 \Xi = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial H}{H \partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{H \partial \eta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}. \quad (I)$$

Для слагающей напряжения в направлении, тангенциальном к кругам $\eta = \text{const}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} -Z &= \frac{1}{H} \left(X_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \xi \partial y} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \xi \partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right), \end{aligned}$$

откуда окончательно:

$$H^2 Z = -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial H}{H \partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{H \partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}. \quad (II)$$

Наконец, для нормального напряжения к кругам $\xi = \text{const}$ найдем:

$$\begin{aligned} H^2 \Upsilon &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \eta \partial y} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \eta \partial x} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \eta \partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \partial w}{\partial \eta \partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

или, окончательно:

$$H^2 \Upsilon = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial H}{H \partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial H}{H \partial \eta}. \quad (III)$$

Из полученных соотношений легко получить следующее:

$$H^2 (\Xi + \Upsilon) = \nabla w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}.$$

Выражения (I), (II) и (III) для напряжений могут быть представлены еще в следующем виде:

$$H \Xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (I')$$

$$H Z = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad (II')$$

$$H \Upsilon = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (III')$$

Обратимся теперь к нахождению напряжений для нашей задачи, что сводится к вычислению $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial w}{\partial \eta}$. В нашем случае функция w имеет вид:

$$\frac{w}{L} = \text{sh}(\alpha - \eta) \left\{ \frac{\text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \cdot \text{ch}(\eta - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta} \right\} + \\ + \text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch}(\eta - \beta) - (\alpha - \eta) \text{ch}(\alpha - \beta).$$

Следовательно:

$$\frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \} \sin \xi}{(\cos \xi + \text{ch } \eta)^2},$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta} = - \left[\frac{\text{ch}(\alpha - \eta) \{ \text{ch } \alpha \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \}}{\cos \xi + \text{ch } \eta} + \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{sh}(2\eta - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta} \right] - \\ - \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \{ \text{ch } \alpha \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \} \text{sh } \eta}{(\cos \xi + \text{ch } \eta)^2} - \text{ch}(2\eta - \alpha - \beta) + \text{ch}(\alpha - \beta).$$

Подставляя эти значения в выражение (I') для Σ , получим:

$$\Sigma = \frac{-p}{\text{sh}(\alpha - \beta) [\text{sh}^2 \alpha + \text{sh}^2 \beta]} \left[\text{sh } \alpha \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \} + \right. \\ \left. + \text{sh}(\alpha - \eta) \text{sh } \eta \cdot \text{sh}(2\eta - \beta) + \right. \\ \left. + \text{sh } \eta (\text{ch } \eta + \cos \xi) \{ \text{ch}(2\eta - \alpha - \beta) - \text{ch}(\alpha - \beta) \} \right].$$

В таком случае легко проверить, что

$$\text{при } \eta = \alpha \quad \Sigma = 0,$$

$$\text{при } \eta = \beta \quad \Sigma = -p.$$

Для нахождения значений Z на границах обратимся к формуле (II'). После выполнения дифференцирования найдем:

$$\frac{c}{L} HZ = -\text{ch}(2\eta - \alpha - \beta) \sin \xi + \text{ch}(\alpha - \beta) \sin \xi,$$

или же

$$\frac{c^2}{L} Z = 2 \sin \xi \text{sh}(\alpha - \eta) \cdot \text{sh}(\eta - \beta) [\text{ch } \eta + \cos \xi].$$

Это — так называемое скалывающее усилие. Отсюда непосредственно заключаем, что

$$\text{при } \eta = \alpha \quad Z = 0,$$

$$\text{при } \eta = \beta \quad Z = 0,$$

как и следовало.

Остается только подсчитать Υ по формуле (III'). После простого дифференцирования будем иметь:

$$\frac{c^2 \Upsilon}{L (\cos \xi + \text{ch } \eta)} = \text{sh}(\alpha - \eta) \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \cdot \text{ch}(\eta - \beta) \} + \\ + 2 \text{ch}(\alpha - \eta) \cdot \text{sh}(2\eta - \beta) - 2 \text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch}(2\eta - \beta) + \\ + \frac{\text{ch}(\alpha - \eta) \cdot \text{sh } \eta \cdot \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \}}{\cos \xi + \text{ch } \eta} - \\ - \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{ch } \eta \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \cdot \text{ch}(\eta - \beta) \}}{\cos \xi + \text{ch } \eta} + \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{sh } \eta \cdot \text{sh}(2\eta - \beta)}{\cos \xi + \text{ch } \eta} + \\ + \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \text{sh}^2 \eta \cdot \{ \text{ch } \alpha \cdot \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \}}{(\cos \xi + \text{ch } \eta)^2} - \\ - 2 \text{sh}(2\eta - \alpha - \beta) (\cos \xi + \text{ch } \eta) - \text{sh } \eta \{ \text{ch}(2\eta - \alpha - \beta) - \text{ch}(\alpha - \beta) \} + \\ + \frac{\text{sh}(\alpha - \eta) \sin^2 \xi \{ \text{ch } \alpha \text{ch}(\alpha - \beta) - \text{ch } \eta \text{ch}(\eta - \beta) \}}{(\cos \xi + \text{ch } \eta)^2}.$$

Собирая члены и производя упрощения, найдем:

$$\frac{c^2}{L(\cos \xi + \operatorname{ch} \eta)} \Upsilon = 2 \operatorname{ch}(\alpha - \eta) \cdot \operatorname{sh}(2\eta - \beta) - 2 \operatorname{sh}(\alpha - \eta) \operatorname{ch}(2\eta - \beta) +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \eta) \{ \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch}(\eta - \beta) \} + \operatorname{sh}(\alpha - \eta) \operatorname{sh}(2\eta - \beta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} \cdot \operatorname{sh} \eta +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \eta) \{ \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch}(\eta - \beta) \} \cdot \operatorname{ch} \eta}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta}$$

$$- 2 \operatorname{sh}(2\eta - \alpha - \beta) [\operatorname{ch} \eta + \cos \xi] - [\operatorname{ch}(2\eta - \alpha - \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta)] \operatorname{sh} \eta. \quad (32)$$

На внутренней окружности, т. е. при $\eta = \alpha$, выражение Υ после простых вычислений примет следующий вид:

$$\left[\frac{c^2}{L} \Upsilon \right]_{\eta=\alpha} = 2 [\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \cos \xi] (\operatorname{ch} \alpha + \cos \xi).$$

Вводя элементы, характеризующие трубу, т. е. r , r_1 , d и c , посредством соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \beta &= \frac{c}{r_1}, & \operatorname{sh} \alpha &= \frac{c}{r}, & \operatorname{sh}(\alpha - \beta) &= \frac{c \cdot d}{r \cdot r_1}, \\ \operatorname{ch} \beta &= \frac{r_1^2 - r^2 + d^2}{2r_1 d}, & \operatorname{ch} \alpha &= \frac{r_1^2 - r^2 - d^2}{2rd}, & \operatorname{ch}(\alpha - \beta) &= \frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2rr_1}, \\ & & -\frac{c^2}{L} &= \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \beta) [\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta]}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

получим:

$$-\frac{\Upsilon}{p} = 2 \left[\frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2rr_1} \cdot \frac{c}{r} - \frac{c \cdot d}{r \cdot r_1} \cos \xi \right] \cdot \left[\frac{r_1^2 - r^2 - d^2}{2rd} + \cos \xi \right] \frac{rr_1}{c \cdot d} \frac{r^2 r_1^2}{c^2 (r^2 + r_1^2)},$$

или

$$-\frac{\Upsilon}{p} = 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 - 2dr \cos \xi)(r_1^2 - r^2 - d^2 + 2dr \cos \xi) r_1^2}{(r^2 + r_1^2) [(r + r_1)^2 - d^2] [(r_1 - r)^2 - d^2]}, \quad (34)$$

так как

$$4c^2 d^2 = [(r + r_1)^2 - d^2] [(r_1 - r)^2 - d^2].$$

Любопытно отметить, что при $d = 0$, т. е. в случае трубы, ограниченной двумя концентрическими цилиндрами, мы получаем формулу Ламе (Lamé):

$$-\frac{\Upsilon}{p} = \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r^2}. \quad (35)$$

Посмотрим, чему будет равняться Υ на наружной поверхности трубы. Из формулы (32) непосредственно заключаем, что

$$\left[\frac{c^2}{L} \Upsilon \right]_{\eta=\beta} = (\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta) \operatorname{sh}(\alpha - \beta) + 2 [\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \cos \xi] (\operatorname{ch} \beta + \cos \xi),$$

или, в силу (33):

$$-\frac{\Upsilon}{p} = 1 + 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 + 2dr_1 \cos \xi)(r_1^2 - r^2 + d^2 + 2dr_1 \cos \xi) r^2}{(r^2 + r_1^2) [(r + r_1)^2 - d^2] [(r_1 - r)^2 - d^2]}. \quad (36)$$

§ 5. Вопрос о максимуме напряжения

Весьма интересно сравнить максимальное напряжение на внешней и внутренней сторонах трубы.

На внутренней стороне трубы будем иметь Υ_{\max} при $\xi = 0$, именно:

$$-\frac{\Upsilon_{\max}}{p} = -\frac{\Lambda}{p} = 2 \frac{r^2 + r_1^2 - d^2 - 2dr}{r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr} \cdot \frac{r_1^2}{r^2 + r_1^2},$$

или, в силу того, что

$$[(r + r_1)^2 - d^2] [(r - r_1)^2 - d^2] = [r_1^2 - (r + d)^2] [r_1^2 - (r - d)^2],$$

найдем:

$$-\frac{\Lambda}{p} = 2 \frac{r_1^2}{r^2 + r_1^2} + \frac{4r^2 r_1^2}{(r^2 + r_1^2)(r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr)}. \quad (37)$$

Аналогично, на наружной стороне Γ_{\max} получим при $\xi = 0$, т. е.

$$-\frac{\Gamma_{\max}}{p} = -\frac{M}{p} = 1 + 2 \frac{r^2 + r_1^2 - d^2 + 2dr_1}{r_1^2 - 2dr_1 + d^2 - r^2} \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_1^2}$$

или

$$-\frac{M}{p} = 1 - \frac{2r^2}{r^2 + r_1^2} + \frac{4r^2 r_1^2}{(r^2 + r_1^2)(r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1)}. \quad (38)$$

Так как

$$r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr = (r_1 - r - d)(r_1 + r + d),$$

$$r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1 = (r_1 - r - d)(r_1 + r - d),$$

то, следовательно:

$$\left| \frac{\Lambda - M}{p} \right| = 1 - \frac{8r^2 r_1^2 d}{(r^2 + r_1^2)[(r + r_1)^2 - d^2](r_1 - r - d)}.$$

Легко доказать, что в нормальных случаях

$$|\Lambda - M| > 0.$$

В самом деле, соблюдается неравенство:

$$(r^2 + r_1^2) [(r + r_1)^2 - d^2] (r_1 - r - d) - 8r^2 r_1^2 d > 0,$$

если только $r_1 - r > 2d$, что и соответствует нормальному случаю, так как тогда $r_1 - r - d > d$; кроме того, всегда:

$$(r^2 + r_1^2) [(r + r_1)^2 - d^2] > (r^2 + r_1^2) [(r + r_1)^2 - (r - r_1)^2] = \\ = (r^2 + r_1^2) 4rr_1 > 8r^2 r_1^2.$$

Чтобы имело место обратное неравенство, достаточно соблюсти условие:

$$(r^2 + r_1^2) (r + r_1)^2 (r_1 - r - d) = 8r^2 r_1^2 d,$$

откуда

$$d = \frac{(r^2 + r_1^2) (r + r_1)^2 (r_1 - r)}{(r^2 + r_1^2) (r + r_1)^2 + 8r^2 r_1^2}. \quad (39)$$

Например, если $r_1 = 10$ см, $r = 9$ см, то

$$d = \frac{181 \cdot 361}{181 \cdot 361 + 8 \cdot 100 \cdot 81} \approx \frac{1}{2} \text{ см.}$$

Отсюда заключаем, что нужен весьма значительный эксцентриситет для того, чтобы максимум напряжения оказался на наружной стороне трубы. Но оно, конечно, как и следовало ожидать, всегда будет около тонкой стороны трубы.

§ 6. Случай, когда давление задано на внутренней стороне трубы

Не лишен практического интереса случай, когда постоянное давление задано на внутренней стороне трубы. Этот случай может быть рассматриваем при расчете, например, бомбы на разрыв.

В этом случае имеем следующие граничные условия:

1) на внутренней границе:

$$X_n = p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n = -p \frac{dx}{ds};$$

2) на внешней границе:

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0.$$

Для функции w эти граничные условия примут вид:

1) на внутренней границе:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = py + k, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = px + l,$$

$$w = \frac{p}{2}(x^2 + y^2) + ky + lx + n;$$

2) на внешней границе:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0.$$

Аналогично § 1 граничные условия для функции w и ее производных окончательно переписываются в следующем виде:

1) на внутренней границе $\eta = \alpha$:

$$w = \frac{pc^2 \operatorname{ch} \alpha}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} + k \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} + n,$$

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{pc^2 \operatorname{sh} \alpha}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} + \frac{k \operatorname{ch} \alpha}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} + (c^2 p \operatorname{ch} \alpha + k \operatorname{sh} \alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha}; \quad (40)$$

2) на внешней границе $\eta = \beta$:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0.$$

Нетрудно установить, что для этого случая следующее выражение для w всем указанным условиям удовлетворяет, именно:

$$\frac{w}{L} = \frac{\operatorname{sh}(\eta - \beta) \{ \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch}(\alpha - \eta) \}}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} + \\ + \operatorname{sh}(\eta - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - \eta) - (\eta - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - \beta).$$

В самом деле, в силу соотношений (4), (7) и § 1, выражению для w можно придать следующий вид:

$$\frac{w}{L} = \left[-\frac{x^2 + y^2 + c^2}{2c^2} \operatorname{sh} \beta + \frac{y}{c} \operatorname{ch} \beta \right] [\operatorname{ch} \beta \cdot \operatorname{ch}(\alpha - \beta) + \cos \xi \operatorname{ch}(\alpha - \eta)] - \\ - (\eta - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - \beta).$$

Отсюда заключаем, что

$$\text{при } \eta = \beta \quad w = 0.$$

Для $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ в этом случае имеем следующее выражение:

$$\frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\operatorname{ch}(\eta - \beta) \{ \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch}(\alpha - \eta) \} + \operatorname{sh}(\eta - \beta) \operatorname{sh}(\alpha - 2\eta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} - \\ - \frac{\operatorname{sh}(\eta - \beta) \{ \dots \} \operatorname{sh} \eta}{(\cos \xi + \operatorname{ch} \eta)^2} + \operatorname{ch}(2\eta - \alpha - \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta).$$

При $\eta = \alpha$ будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{L} &= -\frac{\operatorname{sh} \beta \cdot \operatorname{sh}^2(\alpha - \beta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} + \operatorname{sh}(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - \beta), \\ \frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \eta} &= -\frac{\operatorname{sh}(\alpha - \beta) [\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch}(\alpha - \beta) + \operatorname{sh} \alpha]}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha} - \\ &\quad - \operatorname{sh} \beta \cdot \operatorname{sh}^2(\alpha - \beta) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\cos \xi + \operatorname{ch} \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Аналогично § 3 путем сравнения коэффициентов в выражениях (40) и (41) найдем следующие уравнения:

$$-L \operatorname{sh} \beta \cdot \operatorname{sh}^2(\alpha - \beta) = pc^2 \operatorname{ch} \alpha + k \operatorname{sh} \alpha,$$

$$L [\operatorname{sh}(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - \beta)] = n,$$

$$-L \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - L \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \alpha = pc^2 \operatorname{sh} \alpha + k \operatorname{ch} \alpha,$$

откуда коэффициент L определится следующим образом:

$$L = \frac{pc^2}{\operatorname{sh}(\alpha - \beta) [\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta]}. \quad (42)$$

Обратимся теперь к вычислению составляющих напряжений Ξ, Z, Y для данного случая. Если подставить выражение для w в формулу (I'), то после упрощений найдем, что при $\eta = \beta$:

$$\Xi = 0,$$

Е при $\eta = \alpha$:

$$\frac{c^2}{L} \Xi = -\operatorname{sh} \beta [\operatorname{ch} \beta \cdot \operatorname{ch}(\alpha - \beta) - \operatorname{ch} \alpha] + \operatorname{sh}^2 \alpha \cdot \operatorname{sh}(\alpha - \beta) = \operatorname{sh}(\alpha - \beta) [\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta],$$

т. е. при $\eta = \alpha$ $\Xi = +p$.

Аналогичными выкладками можно убедиться, что при

$$\eta = \alpha \quad Z = 0,$$

$$\eta = \beta \quad Z = 0.$$

Остается подсчитать Y , которое для данного случая приобретает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{L} HY &= 2 \operatorname{ch}(\eta - \beta) \operatorname{sh}(\alpha - 2\eta) - 2 \operatorname{sh}(\eta - \beta) \operatorname{ch}(\alpha - 2\eta) - \\ &\quad \frac{\operatorname{ch}(\eta - \beta) \{ \dots \} + \operatorname{sh}(\eta - \beta) \operatorname{sh}(\alpha - 2\eta)}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} \operatorname{sh} \eta + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sh}(\eta - \beta) \{ \dots \} \operatorname{ch} \eta}{\cos \xi + \operatorname{ch} \eta} + 2 \operatorname{sh}(2\eta - \alpha - \beta) (\cos \xi + \operatorname{ch} \eta) + \\ &\quad + \operatorname{sh} \eta [\operatorname{ch}(2\eta - \alpha - \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta)]. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Отсюда получаем окончательное выражение для величины напряжения на внешней и внутренней окружностях цилиндра.

Именно, при $\eta = \beta$, что соответствует внешней части трубы радиуса r_1 :

$$\left[\frac{c^2 Y}{L} \right]_{r=r_1} = -2 [\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \cos \xi] \cdot [\operatorname{ch} \beta + \cos \xi], \quad (44)$$

или, вводя по формуле (33) величины, характеризующие размеры трубы, находим:

$$\frac{Y}{p} = 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 + 2dr_1 \cos \xi)(r_1^2 - r^2 + d^2 + 2dr_1 \cos \xi)}{[(r + r_1)^2 - d^2][(r_1 - r)^2 - d^2]} \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_1^2}. \quad (45)$$

Аналогично на внутренней стороне трубы при $\eta = \alpha$ имеем:

$$\left[\frac{c^2 Y}{L} \right] = \left. \begin{aligned} &(\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta) \operatorname{sh}(\alpha - \beta) - \\ &- 2 [\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh}(\alpha - \beta) \cos \xi] (\operatorname{ch} \alpha + \cos \xi), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

или, окончательно:

$$\frac{Y}{p} = -1 + 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 - 2dr \cos \xi)(r_1^2 - r^2 - d^2 + 2dr \cos \xi)}{[(r + r_1)^2 - d^2][(r_1 - r)^2 - d^2]} \cdot \frac{r_1^2}{r^2 + r_1^2}. \quad (47)$$

§ 7. Вопрос о максимуме напряжения

Для исследования вопроса о максимуме напряжения обратимся к формулам (45) и (47). На внешней стороне трубы будем иметь γ_{\max} при $\xi = 0$, именно:

$$\frac{\gamma_{\max}}{p} = \frac{M}{p} = 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 + 2dr_1)(r_1^2 - r^2 + d^2 + 2dr_1)}{[(r + r_1)^2 - d^2][(r_1 - r)^2 - d^2]} \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_1^2}.$$

Это выражение может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{M}{p} = 2 \frac{r^2 + r_1^2 - d^2 + 2dr_1}{r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1} \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_1^2},$$

или еще в другой форме:

$$\frac{M}{p} = -2 \frac{r^2}{r^2 + r_1^2} + \frac{4r_1^2 r^2}{r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1} \frac{1}{r^2 + r_1^2}. \quad (48)$$

Аналогично на внутренней стороне трубы имеем γ_{\max} в следующем виде:

$$\frac{\Delta}{p} = -1 + 2 \frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 - 2dr)(r_1^2 - r^2 - d^2 + 2dr)}{[(r + r_1)^2 - d^2][(r_1 - r)^2 - d^2]} \cdot \frac{r_1^2}{r^2 + r_1^2},$$

или в иной форме:

$$\frac{\Delta}{p} = -1 + 2 \frac{r_1^2}{r^2 + r_1^2} + \frac{4r^2 r_1^2}{r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr} \frac{1}{r^2 + r_1^2}. \quad (49)$$

Следовательно:

$$\left| \frac{M - \Delta}{p} \right| = -1 + \frac{4r_1^2 r^2}{r^2 + r_1^2} \left(\frac{1}{r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1} - \frac{1}{r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr} \right).$$

Помня, что

$$r_1^2 - r^2 - d^2 - 2dr = (r_1 - r - d)(r_1 + r + d),$$

$$r_1^2 - r^2 + d^2 - 2dr_1 = (r_1 - r - d)(r_1 + r - d),$$

этому выражению можно придать еще следующий вид:

$$\left| \frac{M - \Delta}{p} \right| = -1 + \frac{8r_1^2 r^2 d}{(r^2 + r_1^2)(r_1 - r - d)[(r_1 + r)^2 - d^2]}.$$

Как было показано в § 5, в нормальных случаях, т. е. при соблюдении неравенства $r_1 - r > 2d$, имеет место неравенство:

$$8r_1^2 r^2 d < (r^2 + r_1^2)(r_1 - r - d)[(r_1 + r)^2 - d^2].$$

Отсюда заключаем, что в нормальных случаях максимум напряжения находится на внутренней стороне трубы. Для соблюдения обратного неравенства, т. е. для того чтобы максимум напряжения оказался на внешней стороне трубы, нужен значительный эксцентриситет. Так, например, для $r_1 = 10$ см и $r = 9$ см $d = \frac{11}{20}$ см.

Summary

The paper deals with the study of the deformation of a tube, bounded by two eccentric cylindrical surfaces, subjected to uniform external pressure.

By the introduction of Neumann's coordinates through formula (3) the problem is reduced to the determination of a function w satisfying the bi-harmonic equation (2) and the boundary conditions of the problem (15), (16) and (17) on the inner ($\eta = \alpha$) and outer ($\eta = \beta$) surfaces of the tube. These requirements are satisfied if the function w is expressed by the formula (18).

The coefficient L is determined by means of parameters characterizing the tube in formula (31) where d is the distance between the axes of cylinders and r and r_1 are the radii of the cylindrical surfaces bounding the tube.

Denoting by E and Z the components of stress normal and tangent to the circumference $\eta = \text{const}$ and by Y the component normal to the circumference $\xi = \text{const}$ we obtain for the value of Y the expressions (34) and (36). For the special case when $d = 0$ we obtain Lamé's equation (35).

The question of maximum stress on the inner and outer surfaces of the tube is investigated in § 5. It appears that a tube with a very large eccentricity is necessary if the maximum stress is to occur on the outer surface. This maximum stress will always have its location close to the thinner side of the tube.

In § 6 is investigated the case when the pressure on the inner surface of the tube is given. For this case the boundary conditions are expressed through the ratio (40) and for the value of Y the expressions (45) and (47) are obtained.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
<i>С. А. Чаплыгин и А. Л. Лаурентьев. О подъемной силе и сопротивлении данного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности</i>	3
<i>Summary</i>	12
<i>С. А. Чаплыгин и Н. С. Аржаников. К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением</i>	13
<i>Summary</i>	24

[Faint rectangular stamp with illegible text and a signature]



Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute

No. 123

ON THE LIFT AND DRAG OF A FLAT WING OF
INFINITE SPAN (ASSUMING DISCONTINUOUS
FLOW ON ITS UPPER SURFACE)

by

S. A. CHAPLIGUIN and A. L. LAVRENTIEV

ON THE DEFORMATION OF AN ECCENTRIC
TUBE SUBJECTED TO UNIFORM EXTERNAL
PRESSURE

by

S. A. CHAPLIGUIN and N. S. ARJANIKOV